MATHEMATIQUES

Préparation au BAC

SUITES

Soit (U_n), une suite définie par récurrence de la façon suivante :

$$U_0 = 2$$
$$U_{n+1} = 2U_n - 1$$

1. Montrer que (U_n) est croissante. (2 points)
2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} Un = +\infty$. (2 points)
3. En définissant $V_n = U_n - a$, exprimer (par récurrence) la définition de (V_n). (2 points)
4. Trouver la valeur de a qui convient pour que (V_n) soit géométrique. (2 points)
5. Exprimer directement (V_n) en fonction de n. (3 points)
6. En déduire l'expression de (U_n) en fonction de n. (3 points)

FONCTIONS

Soit f, une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2} + 2}$$

1. Montrer que f est une fonction paire. (2 points)
2. Identifier le domaine de définition de f. (2 points)
3. Donner f', la fonction dérivée de f. (3 points)
4. Etudier la fonction, et donner son tableau de variation. (4 points)
5. Représenter graphiquement pour $x \in [-5, 5]$ de f dans un repère orthonormé. (2 points)

POLYNOMES

Soit P, le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par

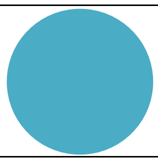
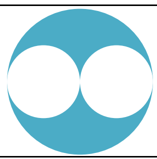
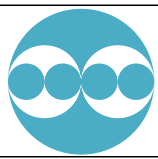
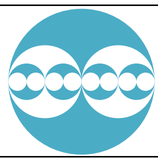
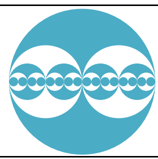
$$P(z) = z^3 - 1$$

1. Combien de racines P admet-il ? (2 points)
2. Donner une racine évidente de P. (1 points)
3. Factoriser (en réalisant la division de polynômes). (3 points)

FRAC-TARTE

Bourriquet aime la pâtisserie. Une délicieuse tarte aux pommes, savoureuse, parfaitement circulaire, quel régal… Il fixe un rayon r qui convient à son appétit, et dessine le cercle associé. Mais Il se rend compte qu'il ne dispose pas d'assez de pâte pour couvrir le disque ainsi délimité. Il décide donc de retirer deux disques plus petits, identiques, dont le rayon est la moitié du précédent.

Et comme il reste de nouveau de la pâte, il décide de remplir chaque disque creux par deux disques plus petits, identiques, dont le rayon est la moitié du précédent. Et comme les équidés sont incapables de repérer des schémas récurrents, Bourriquet va continuer.

					…
Etape 0	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape …

1. Exprimer l'aire S(n) de la surface couverte (bleue) à chaque étape. (4 points)
2. Exprimer le périmètre P(n) de la figure (totalité, cavité comprise) à chaque étape. (4 points)
3. Calculer S(n) et P(n) quand n tend vers l'infini. (4 points)
4. Est-il possible qu'il y'ait trop de pâte, sous quelle condition ? (1 point)
5. Est-il possible qu'il n'y ait pas assez de pâte, sous quelle condition ? (1 point)
6. Pour une aire a de pâte donnée, établir le nb n d'étapes faisables. (2 points)

EXERCICE 5

Soit un ensemble de points du plan, $E = \{ (x_i, y_i)\}$.

On définit un polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$

On cherche à déterminer les valeurs de a, b, c, tels que la courbe de P soit la plus proche possible de l'ensemble des points de E.

Pour cela, on définit une fonction f qui va donner une « distance » entre les points et la courbe de P.

$$f(P, E) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2$$

1. Montrer que $\forall P, E\ f(P, E) \geq 0$. (2 points)
2. Montrer que si les points de E sont sur la courbe de P, alors $f(P, E) = 0$ (2 points)

Trouver la courbe de P la plus proche possible revient à minimiser f.

3. Trouver l'équation résultante pour avoir a rendant f minimale. (1 points)
4. Trouver l'équation résultante pour avoir b rendant f minimale. (1 points)
5. Trouver l'équation résultante pour avoir c rendant f minimale. (1 points)
6. Résoudre et donner la formule de calcul pour a, b, c pour un E donné (2 points)