# La Fonction Exponentielle

## Construction

On cherche à créer une fonction $e\colon \left| \begin{smallmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e(x) \end{smallmatrix} \right.$

Cette fonction doit vérifier la propriété suivante :

---

$$e(x+y) = e(x) \cdot e(y)$$

---

On a $e(x) = e(x-a+a) = e(x-a) \cdot e(a)$

De deux choses l'une

- Soit $\exists x\ e(x) = 0$
- Soit $\forall x\ e(x) \neq 0$

Cas $\exists x\ e(x) = 0$

Nommons cette valeur $a$.

$e(x) = e(x-a) \cdot e(a) = e(x-a) \cdot 0 = 0$

Par conséquent $\forall x\ e(x) = 0$

La fonction nulle est donc une solution possible pour définir la fonction exponentielle.

Cas $\forall x\ e(x) \neq 0$

$e(x) = e\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = e\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e\left(\frac{x}{2}\right) = \left(e\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$, donc $e(x) \geq 0$

Or, $e(x) \neq 0$

Par conséquent

---

$$\forall x\ e(x) > 0$$

---

Comme $e(x) = \left(e\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$, on a $e(0) = \left(e(0)\right)^2$

Ainsi, $\left(e(0)\right)^2 - e(0) = 0$

$e(0)(e(0)-1) = 0$

Comme $\forall x\ e(x) > 0$, le choix $e(0) = 0$ est exclu, on a donc

---

$$e(0) = 1$$

---

Faisons l'hypothèse que la fonction est dérivable, et intéressons-nous à son taux de variation.

$$\frac{e(x+h)-e(x)}{h}=\frac{e(x)\cdot e(h)-e(x)}{h}=e(x)\frac{e(h)-1}{h}=e(x)\frac{e(0+h)-e(0)}{h}$$

Ainsi,

$$e'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e(x+h)-e(x)}{h}=e(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e(0+h)-e(0)}{h}=e(x)\cdot e'(0)$$

$$e'(x)=e'(0)\cdot e(x)$$

Nommons $\lambda$ la valeur $e'(0)$

$$e'(x)=\lambda\cdot e(x)$$

Pour chaque $\lambda$ choisi, la fonction $e(x)$ est-elle unique ?

Prenons $f$ et $g$, deux fonctions qui ont le même $\lambda$.

$$\frac{d}{dx}\frac{f}{g}=\frac{f'g-fg'}{g^2}=\frac{\lambda fg-f\lambda g}{g^2}$$

Donc $\frac{f}{g}$ est une fonction constante.

$$\forall x\ \frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\Longrightarrow\frac{f(0)}{g(0)}=\alpha\Longrightarrow\frac{1}{1}=\alpha\Longrightarrow\alpha=1$$

Par conséquent $f=g$

*Pour $\lambda$ choisi, il existe une unique fonction $e(x)$*

Dans la suite, on choisit d'appeler Exponentielle la fonction correspondant au cas $\lambda=1$, et de s'intéresser uniquement à celle-ci.

On a $e(n)=e(1+1+\cdots)=e(1)\cdot e(1)\cdot\ldots=e(1)^n$ .

Nommons $e=e(1)$

$$e(n)=e^n$$

Comme la fonction e vérifie les mêmes lois que la puissance, on note par extension pour toute valeur de $\mathbb{R}$

$$e(x)=e^x$$

## Propriétés

$$e^{x+y} = e^x e^y$$
$$e^x > 0$$
$$e^0 = 1$$
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

Comme $(e^x)' = e^x$ et que $e^x > 0$, on a $(e^x)'$>0, et donc

*La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$*

On a $e^0 = e^{x-x} = e^x e^{-x}$

Donc $e^x e^{-x} = 1$, et par conséquent

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Intéressons-nous à l'assertion $e^x > x$

On a $\forall x\ e^x > 0$, donc elle est vraie pour $x \leq 0$.

Pour $x > 0$, étudions $e^x - x$

On a $\frac{d}{dx}(e^x - x) = e^x - 1$. $e^0 = 1$, et est strictement croissante. Par conséquent, $e^x > 1$

Donc $e^x - 1 > 0$, donc $e^x - x$ strictement croissante, donc $e^x - x > e^0 - 0 > 0$

$$\forall x\ e^x > x$$

*On a* $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, et $e^x > x$, par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

*On a donc* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{-x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$